第27卷 第3期 工 程 数 学 学 报 Vol. 27 No. 3
2010年06月 CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS June 2010

文章编号:1005-3085(2010)03-0527-07

四阶拟线性椭圆方程的有限元误差估计*

安 荣[1,2], 李开泰[2], 李 媛[2]

(1- 温州大学数学与信息科学学院，温州 325035; 2- 西安交通大学理学院，西安 710049)

摘 要: 针对一类四阶拟线性椭圆方程，本文给出了它的协调有限元逼近。当网格参数 h 足够小时，得到了有限元逼近解与真解之间的误差估计，并且这些误差估计是最优的。最后，通过数值实验验证了理论分析的准确性。证明方法可以类似地应用到某些二阶拟线性椭圆方程的有限元逼近。

关键词: 四阶拟线性椭圆方程；有限元逼近；误差估计

分类号: **AMS**(2000) 65N30 **中图分类号**: O241.82 **文献标识码**: A

1 引言

四阶椭圆方程是一重要的数学模型，常见于板问题中。因此，不论是理论分析还是数值分析都有很好的应用价值。从上世纪70年代开始，有大量的学者都在研究四阶问题，特别是在有限元的数值分析方面。由于Lagrange元素不能直接用来求解四阶问题，才导致了非协调有限元和混合有限元的出现[1-5]。然而，上述文献主要研究的是标准的双调和方程，而对于四阶拟线性椭圆问题的研究并不多，据我们所知，仅仅有Karchevskii等的两篇文章[6,7]。在这两篇文章中，作者分别采用混合有限元方法和协调有限元方法来处理四阶拟线性问题。但是对非线性项有较强的假设。他们要求非线性算子满足强单调性条件并且是Lipschitz连续的，在这种情况下，拟线性问题弱解的存在唯一性可以立即得到，并且真解和逼近解的有限元误差估计可以较容易的得到证明。本文将讨论一类四阶拟线性椭圆问题的协调有限元逼近。在非线性项有较弱的假设下，我们得到了具有最优阶的有限元误差估计。最后通过数值实验验证了理论分析的结果。

在本文，我们约定记号 c 表示不依赖于 h 的正常数，但是它可能为不同的值。

2 四阶拟线性椭圆问题

考虑如下的四阶拟线性椭圆方程

$$\begin{cases} \Delta(a(u)\Delta u) = f, & \text{在 } \Omega \text{ 内}, \\ u = \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\Omega \subset \mathrm{R}^2$ 为一有界光滑的单连通区域，n 为边界 $\partial\Omega$ 的单位外法线方向。假定问题 (1) 的主部满足椭圆性条件，即存在某一正常数 $\alpha_1 > 0$ 使得对任意的 $u \in V = H_0^2(\Omega)$ 有

$$a(u) \geq \alpha_1. \tag{2}$$

收稿日期: 2007-08-24. **作者简介**: 安荣 (1980年8月生)，男，博士，讲师. 研究方向：偏微分方程数值解.

***基金项目**: 国家自然科学基金 (10571142; 10701061; 10901122).

我们还假定 $a(u)$ 满足局部 Lipschitz 条件，即对任意的 $r>0$，当 $\|u_1\|_V+\|u_2\|_V\leq r$ 时，有

$$|a(u_1)-a(u_2)|\leq L|u_1-u_2|, \tag{3}$$

其中 $L>0$ 依赖于 r。给定 $f\in V'=H^{-2}(\Omega)$，那么相应于问题 (1) 的变分形式为：求 $u\in V$，使得

$$A(u,u,v)=(f,v),\quad \forall\, v\in V, \tag{4}$$

其中

$$A(u,v,w)=\int_\Omega a(u)\Delta v\Delta w\mathrm{d}x.$$

对任意的 $u\in V$，定义 V 中的范数为

$$\|u\|_V=\Big(\int_\Omega|\Delta u|^2\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{2}},$$

则根据 (2) 有 $A(u,u,u)\geq\alpha_1\|u\|_V^2$。因此，如果 $u\in V$ 满足问题 (4)，则有

$$\|u\|_V\leq\frac{1}{\alpha_1}\|f\|_{V'}. \tag{5}$$

定理1 在 (2) 和 (3) 的假设下，问题 (4) 至少存在一个弱解 $u\in V$，并且满足 (5)。

证明 由于 V 是自反的，那么存在一组标准正交基 $\{\Phi_i\}_{i=1}^\infty$ 在 V 中稠密且完备。记 V_m 由 Φ_1 到 Φ_m 所张成的空间，定义问题 (4) 的 Galerkin 逼近解 u_m 满足

$$A(u_m,u_m,\Phi_i)=(f,\Phi_i),\quad i=1,\cdots,m, \tag{6}$$

逼近解 u_m 的存在性可由 Brouwer 不动点定理得到。根据 (5)，有

$$\|u_m\|_V\leq\frac{1}{\alpha_1}\|f\|_{V'}.$$

因此，存在 $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ 的子序列 (我们仍记为 $\{u_m\}_{m=1}^\infty$) 和 $u\in V$，使得当 $m\to+\infty$ 时，有 u_m 在 V 中弱收敛于 u，在 $L^2(\Omega)$ 中强收敛于 u，并且在 Ω 中几乎处处收敛于 u。下面我们证明 u 就是问题 (4) 的弱解。

$$\begin{aligned}&|A(u_m,u_m,\Phi_i)-A(u,u,\Phi_i)|\\ \leq\ &|A(u_m,u_m,\Phi_i)-A(u,u_m,\Phi_i)|+|A(u,u_m,\Phi_i)-A(u,u,\Phi_i)|\\ =\ &I_1+I_2.\end{aligned} \tag{7}$$

显然，我们有

$$I_2=\int_\Omega a(u)\Delta(u_m-u)\Delta\Phi_i\mathrm{d}x\to0,\quad 当\quad m\to\infty.$$

根据 (3)，我们还有

$$\begin{aligned}I_1\ &=\ \int_\Omega(a(u_m)-a(u))\Delta u_m\Delta\Phi_i\mathrm{d}x\\ &\leq\ L\|u_m-u\|_{L^\infty}\|u_m\|_V\|\Phi_i\|_V\to0,\quad 当\quad m\to+\infty.\end{aligned}$$

因此，在问题 (6) 中取极限并注意到 Φ_i 的性质，我们就证明了 u 是问题 (4) 的一个弱解。

3 有限元逼近

记 T_h 为一族正则的三角形(或四边形)剖分，其中参数 $0<h<1$。定义有限元空间

$$W_h=\begin{cases}\{u\in C^1(\overline{\Omega})\cap H^2(\Omega),\ u\,|_\tau\in P_5,\ \forall\,\tau\in T_h\} & \text{三角形剖分},\\ \{u\in C^1(\overline{\Omega})\cap H^2(\Omega),\ u\,|_\tau\in Q_3,\ \forall\,\tau\in T_h\} & \text{四边形剖分}.\end{cases}$$

记 $V_h=V\cap W_h$，则 V_h 为 V 的有限元子空间。那么问题(4)的有限元逼近形式为：求 $u_h\in V_h$，使得

$$A(u_h,u_h,v_h)=(f,v_h),\quad \forall\,v_h\in V_h. \tag{8}$$

定义算子 $T:V_h\to V_h$，满足

$$A(u_h,Tu_h,v_h)=(f,v_h),\quad \forall\,v_h\in V_h. \tag{9}$$

记集合

$$\mathcal{D}=\Big\{u_h\in V_h,\ \|u_h\|_V\le\frac{1}{\alpha_1}\|f\|_{V'}\Big\}.$$

容易证明 T 为从 $\mathcal{D}$ 到 $\mathcal{D}$ 的一个连续映射，则由Brouwer不动点定理有：

定理2 在(2)的假设下，离散问题(8)至少存在一个解 $u_h\in V_h$。

4 误差估计

为了得到有限元误差估计，我们要求 $a(u)$ 关于 u 是二次连续可微的，并且满足局部性条件

$$a(u)\le\alpha_2,\quad \forall\,u\in B(R), \tag{10}$$

其中 $B(R)=\{v\in V,\|v\|_V\le R\}$, $\alpha_2>0$ 依赖于 R。下面我们再引入一些有限元的基本假设[8]：

(A_1):

$$\inf_{v_h\in V_h}\|u-v_h\|_{H^s}\le ch^{4-s}\|u\|_{H^4},$$

其中 $0\le s\le 2$。

(A_2):

$$\|v_h\|_V\le ch^{-2}\|v_h\|_0,\quad \forall\,v_h\in V_h,$$

其中 $\|v_h\|_0=\|v_h\|_{L^2}$。

定理3 在(2),(3),(10)和 $(A1)$-$(A2)$ 的假设下，如果 $u\in H^4\cap V$ 和 $u_h\in V_h$ 分别是问题(4)和问题(8)的解，那么对足够小的 h，我们有如下的最优阶误差估计

$$\|u-u_h\|_V\le ch^2,\quad \|u-u_h\|_0\le ch^4.$$

证明 在问题(4)中取 $v=v_h$，并与问题(8)相减得

$$A(u,u,v_h)-A(u_h,u_h,v_h)=0,\quad \forall\,v_h\in V_h. \tag{11}$$

则

$$A(u_h,u-u_h,v_h)=A(u_h,u,v_h)-A(u,u,v_h).$$

因此，根据 (2), (10) 和 (11) 有

$$
\begin{aligned}
\alpha_1\|u-u_h\|_V^2 &\le A(u_h,u-u_h,u-u_h)\\
&= A(u_h,u-u_h,u-v_h)+A(u_h,u-u_h,v_h-u_h)\\
&\le \alpha_2\|u-u_h\|_V\|u-v_h\|_V+A(u_h,u,v_h-u_h)-A(u,u,v_h-u_h)\\
&= \alpha_2\|u-u_h\|_V\|u-v_h\|_V+I. \qquad (12)
\end{aligned}
$$

下面估计 I，

$$
\begin{aligned}
I &= \int_\Omega (a(u_h)-a(u))\Delta u\Delta(v_h-u_h)\mathrm{d}x \le L\int_\Omega |u-u_h||\Delta u||\Delta(v_h-u_h)|\mathrm{d}x\\
&\le L\|u\|_{H_4}\|u-u_h\|_0\|u_h-v_h\|_V \le ch^{-2}\|u-u_h\|_0(\|u-u_h\|_0+\|u-v_h\|_0)\\
&\le ch^{-2}\|u-u_h\|_0^2+ch^2\|u-u_h\|_0\|u\|_{H^4}.
\end{aligned}
$$

将上式代入 (12) 得

$$
\begin{aligned}
\alpha_1\|u-u_h\|_V^2 &\le \alpha_2\|u-u_h\|_V\|u-v_h\|_V+ch^2\|u-u_h\|_0+ch^{-2}\|u-u_h\|_0^2\\
&\le ch^2\|u-u_h\|_V+ch^{-2}\|u-u_h\|_0^2.
\end{aligned}
$$

应用 Young 不等式，有

$$
\|u-u_h\|_V^2 \le ch^4+ch^{-2}\|u-u_h\|_0^2. \qquad (13)
$$

下面估计 $\|u-u_h\|_0$。考虑问题 (1) 的导算子方程

$$
\begin{cases}
Lw=p, & \text{在 } \Omega \text{ 内},\\
w=\dfrac{\partial w}{\partial n}=0, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上},
\end{cases} \qquad (14)
$$

其中

$$
Lw=\Delta\big(a(u)\Delta w+D_ua(u)\Delta uw\big).
$$

问题 (14) 的对偶方程为

$$
\begin{cases}
L^\star w=q, & \text{在 } \Omega \text{ 内},\\
w=\dfrac{\partial w}{\partial n}=0, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上},
\end{cases} \qquad (15)
$$

其中

$$
L^\star w=\Delta\big(a(u)\Delta w\big)+D_ua(u)\Delta u\Delta w.
$$

对任意的 $q\in L^2(\Omega)$，问题 (15) 总存在一个解 $w\in H^4\cap V$，并且 $\|w\|_{H^4}\le c\|q\|_0$。又由有限元的插值理论，存在 $w_h\in V_h$ 使得

$$
\|w-w_h\|_V\le ch^2\|w\|_{H^4}\le ch^2\|q\|_0.
$$

在问题 (15) 中，令 $q = u - u_h$，则有

$$\begin{aligned}
\|u - u_h\|_0^2 &= (L^*w, u - u_h) = (L(u - u_h), w) \\
&= \int_\Omega a(u)\Delta(u - u_h)\Delta w + D_u a(u)\Delta u(u - u_h)\Delta w \mathrm{d}x \\
&= A(u, u, w) - A(u, u_h, w) + \int_\Omega D_u a(u)\Delta u(u - u_h)\Delta w \mathrm{d}x \\
&= A(u, u, w) - A(u_h, u_h, w) + \int_\Omega (a(u_h) - a(u))\Delta u_h \Delta w \mathrm{d}x \\
&\quad + \int_\Omega D_u a(u)\Delta u(u - u_h)\Delta w \mathrm{d}x \\
&= A(u, u, w - w_h) - A(u_h, u_h, w - w_h) + \int_\Omega D_u a(\overline{u})\Delta u_h \Delta w(u_h - u)\mathrm{d}x \\
&\quad + \int_\Omega D_u a(u)\Delta u \Delta w(u - u_h)\mathrm{d}x \\
&\le |A(u_h, u_h - u, w - w_h)| + |A(u, u, w - w_h) - A(u_h, u, w - w_h)| \\
&\quad + \int_\Omega D_u a(\overline{u})(\Delta u_h - \Delta u)\Delta w(u_h - u)\mathrm{d}x \\
&\quad + \int_\Omega (D_u a(\overline{u}) - D_u a(u))\Delta u \Delta w(u_h - u)\mathrm{d}x \\
&\le c\|u - u_h\|_V \|w - w_h\|_V + c\|u - u_h\|_{L^3} \|u - u_h\|_V \|w\|_{H^4} \\
&\le ch^2 \|u - u_h\|_V \|u - u_h\|_0 + c\|u - u_h\|_{L^3} \|u - u_h\|_V \|u - u_h\|_0.
\end{aligned}$$

则由 Young 不等式有

$$\begin{aligned}
\|u - u_h\|_0 &\le ch^2\|u - u_h\|_V + c\|u - u_h\|_{L^3}\|u - u_h\|_V \\
&\le ch^2\|u - u_h\|_V + c\|u - u_h\|_V^{\frac{3}{2}}\|u - u_h\|_0^{\frac{1}{2}} \\
&\le ch^2\|u - u_h\|_V + c\|u - u_h\|_V^3 + \varepsilon\|u - u_h\|_0.
\end{aligned}$$

取 $\varepsilon = \frac{1}{2}$，我们得到

$$\|u - u_h\|_0 \le ch^2\|u - u_h\|_V + c\|u - u_h\|_V^3. \tag{16}$$

将 (16) 代入 (13) 得

$$\|u - u_h\|_V^2 \le ch^4 + ch^2\|u - u_h\|_V^2 + ch^{-2}\|u - u_h\|_V^6.$$

因此，对足够小的 h，有

$$\|u - u_h\|_V^2 \le ch^4 + ch^{-2}\|u - u_h\|_V^6.$$

若 $\|u - u_h\|_V \le ch$，则

$$\|u - u_h\|_V^2 \le ch^4 + ch^2\|u - u_h\|_V^2.$$

那么对足够小的 h 有 $\|u - u_h\|_V \le ch^2$。将上式代入 (16) 即得 $\|u - u_h\|_0 \le ch^4$。

5 数值实验

易知 $a(u) = 1 + u^2$ 满足 (2), (3) 和 (10)，因此，我们考虑

$$\begin{cases} \Delta((1+u^2)\Delta u) = f, & \text{在 } \Omega \text{ 内}, \\ u = \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}, \end{cases}$$

其中 $\Omega = [0,1] \times [0,1]$。取真解 $u = \sin^2 x \sin^2 y$，则容易验证 u 满足齐次边界条件。

我们考虑四边形剖分，有限元素为 Bogner-Fox-Schmidt 元 (Q_3 元)。假设 x 方向与 y 方向的剖分数相同，并都记为 H。表1分别给出了在不同的网格下，有限元求解的 H^2 误差和 L^2 误差。我们可以看出，当网格不断加密时，H^2 误差和 L^2 误差越来越小，并且误差阶数也与我们的理论分析较吻合。

表1: 不同网格下的误差及其阶数

H	$\frac{\|u-u_h\|_{L^2}}{\|u\|_{L^2}}$	阶数	$\frac{\|u-u_h\|_V}{\|u\|_V}$	阶数	时间 (s)
4	0.282592		0.127703		0.57
8	8.154853×10^{-3}	5.11	7.939616×10^{-2}	0.69	1.82
16	4.352941×10^{-4}	4.23	1.988717×10^{-2}	2.00	7.51
32	3.241255×10^{-5}	3.75	4.975746×10^{-3}	2.00	57.75
64	2.102684×10^{-6}	4.00	1.244261×10^{-3}	2.00	1465.54

参考文献:

[1] Morley L. The triangular equilibrium problem in the solution of plate bending problems[J]. Aero Quart, 1968, 19: 149-169

[2] Bazeley G, Cheung Y, Irons B, *et al.* Triangular elements in bending conforming and nonconforming solutions[C]// Proceedings of the Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, Ohio, 1965

[3] Babuska I, Osborn J, Pitkaranta J. Analysis of mixed methods using mesh dependent norms[J]. Mathematics of Computation, 1980, 35(152): 1039-1062

[4] Brezzi F, Raviart P. Mixed finite element methods for fourth order elliptic equations[C]// Topic in Numerical Analysis III, New York: Academic Press, 1978

[5] Ciarlet P, Raviart P. A mixed finite element method for the biharmonic equation[C]// Symposium on Mathematical Aspects of Finite Element in Partial Differential Equations, New York: Academic Press, 1974: 125-143

[6] Karchevskii M, Lyashko A, Timerbaev M. A mixed finite-element method for quasilinear degenerate fourth-order elliptic equations[J]. Differential Equations, 2000, 36(7): 1050-1057

[7] Karchevskii M, Lyashko A, Timerbaev M. A finite element method for fourth-order quasilinear degenerating elliptic equations[J]. Differential Equations, 1999, 35(2): 233-238

[8] 李开泰，黄艾香，黄庆怀. 有限元方法及其应用[M]. 北京：科学出版社，2006
Li K T, Huang A X, Huang Q H. Finite Element Methods and Applications[M]. Beijing: Science Press, 2006

Finite Element Error Estimate of Fourth Order Quasilinear Elliptic Equations

AN Rong[1,2], LI Kai-tai[2], LI Yuan[2]

(1- College of Mathematics and Information Science, Wenzhou University, Wenzhou 325035;
2- School of Science, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049)

Abstract: For a class of fourth order quasilinear elliptic equations, the conforming finite element approximation is presented. If the parameter h of the grid is sufficiently small, the error estimates between the finite element approximation solution and the true solution are obtained. Moreover, these estimates are optimal. Finally, the numerical experiment is given to verify the correctness of the theoretical analysis. The proof method can be extended to the finite element approximation of some second order elliptic equations.

Keywords: fourth order quasilinear elliptic equation; finite element approximation; error estimate

Received: 24 Aug 2007. **Accepted:** 05 Nov 2008.
Foundation item: The National Natural Science Foundation of China (10571142; 10701061; 10901122).